MAT102 ANALİZ II 2017-2018 YAZ DÖNEMİ FİNAL SORU VE ÇÖZÜMLERİ

1) $\sin^2(x.y) = \frac{1}{4}$ ile verilen $y=f(x)$ fonksiyonuna $(1,\pi/6)$ noktasında çizilen teğet doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm: $2\sin(x.y).\cos(x.y).(y+x.y')=0$

$m_T = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\pi/6)} \Rightarrow 2.\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{6}.\left(\frac{\pi}{6}+y'\right)=0 \Rightarrow$

$2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(\frac{\pi}{6}+y'\right)=0 \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\pi/6)} = -\frac{\pi}{6} = m_T$

Teğet doğru denklemi $y-\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}.(x-1)$ dır.

2) Lagrange ve Rolle Teoremini ifade ediniz.

$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}.\arcsin x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$ fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında Rolle Teoremi uygulanabilir mi? İlgili c sayısını bulunuz.

Çözüm: $f(0) = \frac{3}{\pi}.\arcsin 0 = 0$

$f(1) = 1-1 = 0$

$x\in[0,\frac{1}{2}]$ için $f(x) = \frac{3}{\pi}\arcsin x$
$x\in[\frac{1}{2},1]$ için $f(x) = 1-x$
sürekli,

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{3}{\pi}.\arcsin x = \frac{3}{\pi}.\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$f(1/2) = \frac{1}{2} \Rightarrow f,\ \frac{1}{2}$ de sürekli.

$f,\ (0,1)$ de türevli mi?

$x\in(0,\frac{1}{2})$ için $f(x) = \frac{3}{\pi}\arcsin x$, $f'(x) = \frac{3}{\pi}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $1-x^2>0$ olmalı
$x^2<1$, $-1<x<1$, $x\in(0,\frac{1}{2})$ türevli.

$x\in(\frac{1}{2},1)$ için $f(x)=1-x \Rightarrow f'(x)=-1$ türevli

$f'(\frac{1}{2}^+) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{1-x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to 1/2^+} \frac{\frac{1}{2}-x}{x-\frac{1}{2}} = -1 \Rightarrow f'(\frac{1}{2}^+) = -1$

$f'(\frac{1}{2}^-) = \lim_{x\to 1/2^-} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{\frac{3}{\pi}\arcsin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{\frac{3}{\pi}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-0}{1} =$

$= \frac{3}{\pi}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{3}{\pi}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ $\qquad -1 \ne \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ $\quad f'(\frac{1}{2})$ yok

Rolle Teo. uygulanamaz.

③ $f(x)=\frac{1}{25-4x^2}$ fonksiyonunun değişimini inceleyip, grafiğini çiziniz.

Çözüm: $25-4x^2=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2},\ x=\frac{5}{2}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right\}$

x		$-5/2$		$5/2$	
$25-4x^2$	$-$		$+$		$-$

. $x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{25}$, $y=0$ olamaz.

. $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}^+}\frac{1}{25-4x^2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}^-}\frac{1}{25-4x^2}=+\infty$

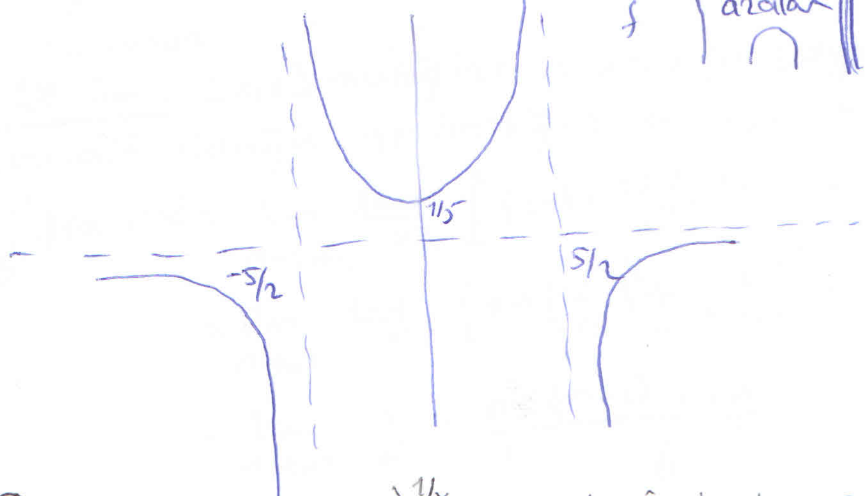
$\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}^+}\frac{1}{25-4x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}^-}\frac{1}{25-4x^2}=-\infty$ $\quad$ $x=\mp\frac{5}{2}$ düşey asimp.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{25-4x^2}=0$ $\quad$ $y=0$ yatay asimp.

. $f'(x)=-\frac{1}{(25-4x^2)^2}\cdot(-8x)=\frac{8x}{(25-4x^2)^2}$ $\quad$ $x>0 \Rightarrow f'(x)>0$, $x<0 \Rightarrow f'(x)<0$.

. $f''(x)=\frac{96x^2+200}{(25-4x^2)^3}$

x	$+\infty$	$-5/2$		0		$5/2$	$+\infty$
f'	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
f''	$-$	‖	$+$		$+$	‖	$-$
f	azalan $\cap$	‖	azalan $\cup$		artan $\cup$	‖	artan $\cap$



④ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)^{1/x}$ limitini bulunuz.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/x}=0^0$, $\quad y=\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/x} \Rightarrow \ln y=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\frac{-1}{1+x^2}}{1}=$

$=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\overset{\infty\cdot 0}{=}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot 2x}{-\frac{1}{1+x^2}}=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0 \Rightarrow \ln\lim\limits_{x\to\infty}y=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}y=e^0=1.$

(5) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{2+2\sin x-2\cos x} = ?$

Çözüm: $t=\tan\frac{x}{2}$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{2+2\sin x-2\cos x} = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{4t}{1+t^2}-2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\cdot\int \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)(4t^2+4t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(1-t)\,dt}{t\cdot(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{t+1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{4}\int\frac{2t\,dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{4}\ln(1+t^2) - \frac{1}{2}\arctan t + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

(6) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ integralini belirli integral tanımını kullanarak bulunuz.

Çözüm: $[0,1]$ aralığını n eşit parçaya bölelim, t_i noktasını ait olduğu alt aralığın sol uç noktası olarak alalım.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\left[0+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\dots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

(7) $\displaystyle\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = ?$ $\quad e^x-1=u^2,\ e^x dx = 2u\,du,$

$x=0 \Rightarrow e^0-1=u^2 \Rightarrow u=0$

$x=\ln 5 \Rightarrow e^{\ln 5}-1=u^2 \Rightarrow 5-1=u^2,\ u=2.$

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = \int_0^2\frac{2u\cdot u}{u^2+4}\,du = 2\cdot\int\frac{u^2}{u^2+4}\,du = 2\cdot\int_0^2\frac{u^2+4-4}{u^2+4}\,du =$$

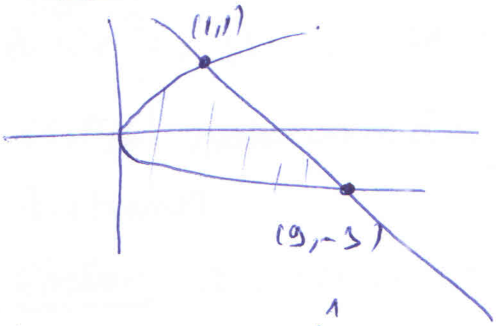
$$= 2\cdot\int_0^2 du - 2\cdot\int_0^2\frac{1}{u^2+4}\,du = 2u\Big|_0^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}\Big|_0^2$$

$$= 2(2-0) - \arctan 1 + \arctan 0 = 4 - \arctan 1 + \arctan 0$$

$$= 4-\pi$$

8) $x=y^2$, $x=3-2y$ tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$y^2=3-2y \Rightarrow y^2+2y-3=0$$

$$y=1, \quad y=-3$$

$$x=1, \quad x=9$$

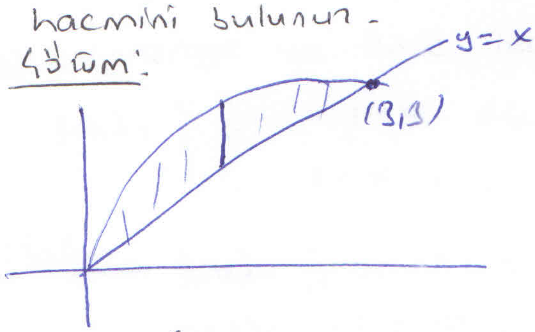
$$(1,1), \ (9,-3)$$

$$A=\int_{-3}^{1}[(3-2y)-y^2]\,dy=\frac{32}{3} \text{ br}^2.$$

İkinci yol: $A=\int_0^1[\sqrt{x}-(-\sqrt{x})]\,dx+\int_1^9\left[\frac{1}{2}(3-x)-(-\sqrt{x})\right]dx=\frac{32}{3} \text{ br}^2$

9) $y=4x-x^2$ parabolü ve $y=x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:



$$V=2\pi\int_0^3 x\cdot[(4x-x^2)-x]\,dx=$$

$$=2\pi\int_0^3(3x^2-x^3)\,dx=\frac{27}{2}\pi$$

10) $\int_0^{x^2} f(t)\,dt=x\cdot\cos\pi x$, $x\geq 0$ ise $f(4)=?$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} f(t)\,dt\right)=\frac{d}{dx}(x\cos\pi x)$$

$$2x\cdot f(x^2)=\cos\pi x-x\pi\sin\pi x$$

$f(4)$ için $x=2$ yazılmalı

$$2\cdot 2\cdot f(2^2)=\cos 2\pi-2\pi\sin 2\pi \Rightarrow f(4)=1/4.$$